المحاضرة ⑦ حل جملة المعادلات الخطية

طريقة غوص ، طريقة غوص – جوردان ، تمارين و مسائل

ثالثاً : حل جملة m معادلة خطية بـ n مجهول :

❶ حل الجملة باستخدام طريقة غوص :

خطوات حل جملة معادلات خطية بطريقة غوص :

1) نشكل المصفوفة الموسعة $H = (A \vdots b)$ للجملة المفروضة.

2) نجري التحويلات السطرية على المصفوفة الموسعة (حصراً على الأسطر) حتى الحصول على المصفوفة المدرجة

3) نكتب جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة المدرجة الناتجة و هي جملة جديدة تكافئ الأصلية و لكنها أسهل حلاً.

المسألة الأولى : حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة غوص :

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \quad ① \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 2 \quad ② \\ 3x & + & y & + & z & = & 1 \quad ③ \end{array}$$

- $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 3 & \vdots & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{matrix}$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & -3 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & -5 & -8 & \vdots & -2 \end{bmatrix} R_2 \to R_2 \div (-3)$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -5 & -8 & \vdots & -2 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 + 5R_2$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow x + 2y + 3z = 1 \\ \Rightarrow y + z = 0 \\ \Rightarrow -3z = -2 \end{matrix}$

- $-3z = -2 \Longrightarrow \boxed{z = \frac{2}{3}}$
- $y + z = 0 \Longrightarrow y = -z \Longrightarrow \boxed{y = -\frac{2}{3}}$
- $x + 2y + 3z = 1 \Longrightarrow x = 1 - 2y - 3z = 1 + \frac{4}{3} - 2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{z = \frac{1}{3}}$
- $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

❷ حل الجملة باستخدام طريقة غوص - جوردان :

خطوات حل جملة معادلات خطية بطريقة غوص - جوردان :

1) نشكل المصفوفة الموسعة $H = (A \vdots b)$ للجملة المفروضة.

2) نجري التحويلات السطرية حصراً على المصفوفة الموسعة حتى الحصول على المصفوفة المدرجة المختزلة

3) نكتب جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة المدرجة الناتجة و هي جملة جديدة تكافئ الأصلية و لكنها أسهل حلاً.

حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة غوص – جوردان :

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 & ① \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 2 & ② \\ 3x & + & y & + & z & = & 1 & ③ \end{array}$$

- $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 3 & \vdots & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{matrix}$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & -3 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & -5 & -8 & \vdots & -2 \end{bmatrix} R_2 \to R_2 \div (-3)$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -5 & -8 & \vdots & -2 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 + 5R_2$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & -2 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 \div (-3)$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 - 3R_3 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \\ \\ \end{matrix}$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Longrightarrow & x = 1/3 \\ \Longrightarrow & y = -2/3 \\ \Longrightarrow & z = 2/3 \end{matrix}$

مسائل محلولة - المسألة الأولى :

لتكن المصفوفات التالية : $A=\begin{bmatrix}\lambda & 2 & 3\\ 0 & 1-\lambda & 4\\ 0 & 0 & 1+\lambda\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}7\\ 3\\ 3\end{bmatrix}$

① ناقش حسب قيم λ وجود معكوس للمصفوفة A

② من أجل $(\lambda=2)$ اوجد:
[1 $A\cdot B$, $B\cdot A$, $B\cdot b$

[2 A^{-1} ، B^{T}

[3 حل جملة المعادلات الخطية $AX=b$ بالاستفادة من مقلوب المصفوفة A

الحل :

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 3\\ 0 & 1-\lambda & 4\\ 0 & 0 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda)$$

$|A|=0\rightarrow(\lambda=0)\ or\ (\lambda=1)\ or\ (\lambda=-1)$

- يكون للمصفوفة معكوس عندما : $|A|\neq 0$ أي عندما : $\lambda\in\{-1,0,+1\}$
- لا يكون للمصفوفة معكوس عندما : $\lambda\in\mathbb{R}/\{-1,0,+1\}$

من أجل $(\lambda=2)$ تكون المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

[1 $A\cdot B$, $B\cdot A$, $B\cdot b$

$A_{3\times3}\cdot B_{2\times3}\rightarrow$ غير ممكنة

$$B_{2\times3}\cdot A_{3\times3}=C_{2\times3}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 21\\ 2 & -1 & 21\end{bmatrix}$$

$$B_{2\times3}\cdot b_{3\times1}=D_{2\times1}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\ 3\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26\\ 22\end{bmatrix}$$

[2 A^{-1} ، B^{T}

$$B^{T}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & \frac{-b}{ad} & \frac{\begin{vmatrix}b & c\\ d & e\end{vmatrix}}{adf}\\ 0 & \frac{1}{d} & \frac{-e}{df}\\ 0 & 0 & \frac{1}{f}\end{bmatrix}\quad,\quad A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & -\frac{11}{6}\\ 0 & -1 & \frac{4}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

3] حل جملة المعادلات الخطي $AX = b$ ة بالاستفادة من مقلوب المصفوفة A

$$AX = b \to A^{-1}AX = A^{-1}b \to IX = A^{-1}b \to \boxed{X = A^{-1}b}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{11}{6} \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} + 3 - \frac{11}{2} \\ 0 - 3 + 4 \\ 0 + 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{bmatrix}$$

المسألة الثانية :

ابحث في حلول جملة المعادلات بطريقة كرامر:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & 5y & - & 2z & = & 6 & ① \\ 4x & + & y & - & 3z & = & 8 & ② \\ 2x & + & 9y & - & z & = & -2 & ③ \end{array}$$

- $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 0$
- $\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 8 & 1 & -3 \\ -2 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 78 \neq 0$

بما أن $\Delta = 0$ و $\Delta_x \neq 0$ فإن الجملة مستحيلة الحل